

多径环境下联合时间反演和 PCA 降维的阵列幅相误差校正

李方伟, 鲁佳文, 王明月

(重庆邮电大学通信与信息工程学院, 重庆 400065)

摘要: 针对多径环境下信号源相干导致阵列幅相误差校正不准确的问题, 提出了一种联合时间反演和主成分分析的阵列幅相误差校正算法。所提算法利用时间反演的空时同步聚焦特性获取目标的回传矩阵信号以抑制多径效应并降低信号源相干性。时间反演的引入使阵列接收到的回传信号矩阵维度增大, 从而增加了算法的计算复杂度, 因此借助主成分分析思想对修正后的时间反演回传矩阵进行降维重构以降低算法的计算复杂度。仿真结果表明, 在多径环境下, 所提算法能够以较低的计算复杂度实现对阵列幅相误差的有效校正。

关键词: 多径效应; 时间反演; 幅相误差校正; 主成分分析

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2021145

Gain and phase errors calibration for joint time reversal and PCA dimensionality reduction over multipath environment

LI Fangwei, LU Jiawen, WANG Mingyue

School of Communication and Information Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China

Abstract: Aiming at the problem of inaccurate calibration of the array gain and phase errors caused by the signal source coherence in the multipath environment, a combination of time reversal (TR) and principal component analysis (PCA) calibration algorithm was proposed. The space-time synchronization focusing characteristic of TR was applied to obtain the return signal matrix of the target to suppress the multipath effect and reduce the signal source coherence. However, in view of the problem that the introduction of TR would make the dimension of the return signal matrix received by the array larger and increase the calculation complexity of the algorithm, PCA was utilized to implement dimensionality reduction reconstruction on the revised TR return signal matrix to reduce the computational complexity. The simulation results show that the proposed algorithm can effectively calibrate the gain and phase errors of the array with lower computational complexity in a multipath environment.

Keywords: multipath effect, time reversal, gain and phase errors calibration, principal component analysis

1 引言

波达方向 (DOA, direction of arrival) 估计是阵列信号处理中的一个重要研究课题, 在雷达、声呐、通信和医疗等领域发挥着重要作用^[1-3]。DOA 估计算法主要分为传统法、子空间法和最大似然法, 其中, 子空间法因具有高分辨性的显著优势受到了产

业界和学术界的广泛研究。在实际应用场景中, 接收阵列流型往往会存在一定的幅度误差和相位误差, 即幅相误差。而子空间法的高分辨率依赖于精确获知接收阵列先验信息, 阵列幅相误差的出现会恶化此类方法的 DOA 估计性能^[4-5]。因此, 如何有效降低或消除幅相误差对子空间法 DOA 估计的影响仍是一项重要且具有挑战性的任务。

收稿日期: 2021-01-22; 修回日期: 2021-04-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.61771084); 重庆市教委科学技术基金资助项目 (No.KJQN201800834)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.61771084), The Science and Technology Research Program of Chongqing Municipal Education Commission (No.KJQN201800834)

针对阵列幅相误差导致子空间法 DOA 估计不精确的问题, 目前已提出多种校正方法, 主要分为两类。第一类是自校正类方法, 这类方法根据某种优化准则联合估计信号源的方位和阵列幅相误差扰动因子。其优势在于不需要设置方向及角度已知的辅助阵元, 但需要求解高维、多模的非线性优化问题, 求解过程计算复杂度高且无法保证全局收敛。第二类是有源校正类方法, 该类方法通过设置方向角度精确已知的辅助阵元对阵列误差参数进行测量或估计。其优势在于误差校正精度较高且计算复杂度相对较低, 但需要设置已知方位信息的辅助阵元。有源校正类方法具有较高校正精度和较低计算复杂度, 在实际工程中得到了广泛的应用, 本文也将研究此类方法。

同时, 有源校正类方法与自校正类方法大都以信号源非相干条件为前提, 很少考虑信号源的多径传播问题。然而, 在实际的无线通信环境中无法完全避免多径传播, 尤其是在富散射环境中多径效应使信号源相干性大大增强, 此时相干信号源的存在将导致阵列幅相误差校正性能不理想^[6]。国内外学者针对多径环境下的幅相误差校正问题进行了研究, 王布宏等^[7]构造了一个多径环境中的阵列幅相误差校正代价函数, 并通过遗传算法实现了阵列幅相误差校正。王鼎等^[8]研究了多径条件下针对乘性阵列误差参数的有源阵列校正算法, 并推导了不同矩阵模型的求解公式。Sippel 等^[9]提出了一种使用非相干发射标校正耦合误差的校正算法, 该算法通过采用阵列近场内随机参考点定标以减少多径效应的影响。但上述算法存在计算复杂度较高或误差校正精度较低等问题, 设计适用于多径环境的复杂度低且校正精度高的算法是目前的研究难点。

时间反演 (TR, time reversal) 利用时间反演信道的脉冲响应作为发射机的匹配滤波器, 借助周围环境丰富的多径实现了空时同步聚焦^[10-11]。基于这一聚焦特性, 将 TR 技术应用于复杂多径环境中能有效抑制多径效应并降低信号源的相干性, 进而提高阵列幅相误差校正算法的精度。在上述分析的基础上, 本文结合主成分分析 (PCA, principal component analysis) 提出了一种适用于多径环境的 TR 降维阵列幅相误差校正算法, 该算法通过 TR 技术有效抑制了多径效应, 减小了算法的均方根误差并提升了算法的分辨率, 同时利用 PCA 思想降低了

算法的复杂度, 进一步优化了系统性能。

2 系统模型

本文所提阵列幅相误差校正算法以多径环境下的阵列幅相误差校正模型为应用场景, 如图 1 所示。图 1 中包括一组阵元数目为 M 的均匀线性阵列, 前 P 个阵元是精确校正过的 (即辅助阵元)。为避免产生阵元间干扰, 将每个阵元的间距设置为相干距离 $d = \lambda / 2$, 阵元与目标物体之间的多径条数为 K 。整个传输信道为频率选择性衰落信道, 衰落系统服从于均值为 0、方差为 $2\sigma^2$ (σ^2 为每个实数维上的方差) 的循环对称复高斯分布。

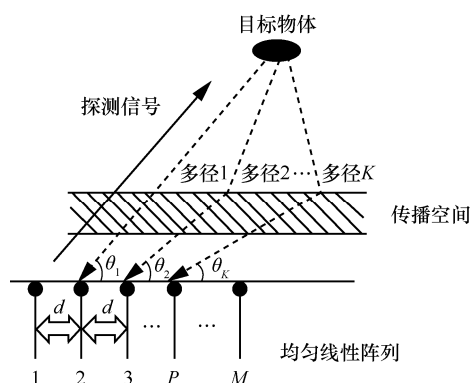


图 1 多径环境下的阵列幅相误差校正模型

首先, 天线阵列中已精确校正过的阵元对传播空间发射一个已知的探测信号 $f(t)e^{j\omega t}$, 目的是获取传播空间中的信道状态信息; 然后, 阵列第 m 个阵元接收到的信号可表示为

$$r_m(t) = \sum_{k=1}^K X_k f(t - \tau_{1,k} - \nabla \tau_{1,m,k}) + n_m(t) \quad (1)$$

其中, $r_m(t)$ 为基站天线阵列中第 m 个阵元所接收到的回传信号, X_k 为第 k 条多径信号的衰减系数, $f(t - \tau_{1,k} - \nabla \tau_{1,m,k})$ 为信号 $f(t)$ 的时延, $\tau_{1,k}$ 为多径 k 相对于第一个阵元的参考时延, $\nabla \tau_{1,m,k}$ 为多径 k 中超过 $\tau_{1,k}$ 的阵元间时延, $n_m(t)$ 为传播过程中产生的加性白高斯噪声。

对接收到的信号进行傅里叶变换, 式(1)可以表示为

$$R_m(\omega) = \sum_{k=1}^K e^{-j\omega \nabla \tau_{1,m,k}} X_k e^{-j\omega \tau_{1,k}} F(\omega) + N_m(\omega) \quad (2)$$

其中, $R_m(\omega)$ 、 $F(\omega)$ 和 $N_m(\omega)$ 分别是 $r_m(t)$ 、 $f(t)$ 和 $n_m(t)$ 的傅里叶变换形式。改写成更紧凑的向量形

式为

$$\mathbf{R}(\omega) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{X} \mathbf{\Gamma}_k(\omega) \mathbf{F}(\omega) + \mathbf{N}(\omega) \quad (3)$$

其中, $\mathbf{R}(\omega)$ 是 TR 前向探测信号; $\mathbf{N}(\omega)$ 是均值为 0、方差为 $\sigma^2 \mathbf{I}_K$ 的加性白高斯噪声; $\mathbf{A}(\theta)$ 、 \mathbf{X} 、 $\mathbf{\Gamma}_k(\omega)$ 分别是 K 阶转向向量 (也称为阵列流型向量)、信道衰减矩阵、传播延时向量, 可分别表示为

$$\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1) \mathbf{a}(\theta_2) \cdots \mathbf{a}(\theta_K)] \quad (4)$$

$$\mathbf{X} = \text{diag}\{X_1, X_2, \dots, X_K\} \quad (5)$$

$$\mathbf{\Gamma}_k(\omega) = [e^{-j\omega\tau_{(1,1)}}, e^{-j\omega\tau_{(1,2)}}, \dots, e^{-j\omega\tau_{(1,K)}}]^T \quad (6)$$

其中, 导向矢量 $\mathbf{a}(\theta_k)$ 可表示为 $\mathbf{a}(\theta_k) = [1, e^{-\frac{j\omega d \sin \theta_k}{c}}, \dots, e^{-\frac{j\omega(M-1)d \sin \theta_k}{c}}]^T$ ($k=1, 2, \dots, K$), d 和 c 分别为阵元间距和信号传播速度。

3 算法设计

本节主要从相干性消除、导向矢量修正和 PCA 降维误差校正三方面对所提算法进行阐述。

3.1 TR 消除信号相干性

通过 TR 技术对 $\mathbf{R}(\omega)$ 进行频域共轭和能量归一化处理可得

$$\mathbf{F}_{\text{TR}}(\omega) = \mathbf{g} \mathbf{R}^*(\omega) \quad (7)$$

其中, \mathbf{g} 为能量归一化因子, 计算式为

$$\mathbf{g} = \sqrt{\frac{\|\mathbf{F}(\omega)\|^2}{\|\mathbf{R}(\omega)\|^2}} \quad (8)$$

能量归一化后, 将 $\mathbf{F}_{\text{TR}}(\omega)$ 重新发射到探测空间中以获取目标的位置信息。假设在整个 TR 阶段信道状态信息不发生剧烈改变且探测阶段所获得的信道信息可靠, 相应地, 算法的时效性得以保证。重新发射的 TR 信号触碰到目标物之后会回传并经历与到达接收阵列之前相似的过程 (例如散射、反射与折射等) [12], 最终被阵列记录下来。将阵列记录下来的 TR 回传矩阵信号表示为

$$\mathbf{R}_{\text{TR}}(\omega) = \sum_{m=1}^M \mathbf{A}(\theta) \mathbf{X} \mathbf{\Gamma}_m(\omega) \mathbf{F}_{\text{TR}}^m(\omega) + \xi(\omega) \quad (9)$$

其中, $\mathbf{F}_{\text{TR}}^m(\omega)$ 表示 $\mathbf{F}_{\text{TR}}(\omega)$ 中第 m 列的值, $\xi(\omega)$ 表示 TR 阶段的噪声。为了说明 TR 可使信号源相干性降低, 本文给出以下推导。

首先, 简化多径环境。设阵元数 $M=3$, 多径数目 $K=2$, 阵列的第一个阵元发送前向探测信号。

由式(9)可得

$$\mathbf{R}_{\text{TR}}(\omega) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{X} [\mathbf{\Gamma}_1(\omega), \mathbf{\Gamma}_2(\omega), \mathbf{\Gamma}_3(\omega)] \mathbf{F}_{\text{TR}}^1(\omega) + \xi(\omega) \quad (10)$$

其中, $\mathbf{\Gamma}_i(\omega) = [e^{-j\omega\tau_{1,1}}, e^{-j\omega\tau_{1,i}}]^T$, 根据均匀线性阵列阵元间的时延计算方法可得

$$\tau_{1,i} = \tau_{1,1} + \Delta\tau_{1,i} \quad (11)$$

$$\tau_{2,i} = \tau_{2,1} + \Delta\tau_{2,i} \quad (12)$$

则有

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\text{TR}}^1(\omega) &= [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2)] \cdot \\ \mathbf{X} \begin{bmatrix} e^{-j\omega\tau_{1,1}} & e^{-j\omega\tau_{2,1}} & e^{-j\omega\tau_{3,1}} \\ e^{-j\omega\tau_{1,2}} & e^{-j\omega\tau_{2,2}} & e^{-j\omega\tau_{3,2}} \end{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{TR}}^1(\omega) + \xi_1(\omega) &= \\ [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2)] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\omega\tau_{1,1}} \\ e^{-j\omega\tau_{2,1}} \end{bmatrix} \mathbf{a}^T(\theta_1) \mathbf{F}_{\text{TR}}^1(\omega) + \xi_1(\omega) &= \\ [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2)] \begin{bmatrix} X_1 e^{-j\omega\tau_{1,1}} \\ X_2 e^{-j\omega\tau_{2,1}} \end{bmatrix} \mathbf{a}^T(\theta_1) \cdot \\ \left\{ \mathbf{a}^*(\theta_1), \mathbf{a}^*(\theta_2) \right\} \begin{bmatrix} X_1^* e^{-j\omega\tau_{1,1}} \\ X_2^* e^{-j\omega\tau_{2,1}} \end{bmatrix} \mathbf{F}^*(\omega) + \mathbf{N}_1^*(\omega) \Big\} + \xi_1(\omega) &= \\ [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2)] \begin{bmatrix} X_1 e^{-j\omega\tau_{1,1}} \\ X_2 e^{-j\omega\tau_{2,1}} \end{bmatrix} \left[3 \mathbf{a}^T(\theta_1) \mathbf{a}^*(\theta_2) \right] \cdot \\ \begin{bmatrix} X_1^* e^{-j\omega\tau_{1,1}} \\ X_2^* e^{-j\omega\tau_{2,1}} \end{bmatrix} \mathbf{F}^*(\omega) + \xi_1(\omega) & \quad (13) \end{aligned}$$

其中, $\xi_1(\omega)$ 表示综合后的噪声分量。

根据导向矢量的定义可知

$$\mathbf{a}^T(\theta_1) \mathbf{a}^*(\theta_1) = 3 \quad (14)$$

为了方便书写, 令 $\lambda = \mathbf{a}^T(\theta_1) \mathbf{a}^*(\theta_2)$, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\text{TR}}^1 &= [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2)] \begin{bmatrix} X_1 e^{-j\omega\tau_{1,1}} \\ X_2 e^{-j\omega\tau_{2,1}} \end{bmatrix} \left[3 \quad \lambda \right] \begin{bmatrix} X_1^* e^{-j\omega\tau_{1,1}} \\ X_2^* e^{-j\omega\tau_{2,1}} \end{bmatrix} \cdot \\ \mathbf{F}^*(\omega) + \xi_1(\omega) &= \\ [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2)] \left[3|X_1|^2 + \lambda X_1 X_2^* e^{-j\omega(\tau_{1,1}-\tau_{1,2})} \right. \\ \left. 3X_1^* X_2 e^{-j\omega(\tau_{1,1}-\tau_{1,2})} + \lambda|X_2|^2 \right] \mathbf{F}^*(\omega) + \xi_1(\omega) & \quad (15) \end{aligned}$$

令 $p = 3|X_1|^2$, $q = \lambda|X_2|^2$, $r = \lambda X_1 X_2^* e^{-j\omega(\tau_{1,1}-\tau_{1,2})}$, 则经过 TR 阶段以后, 2 个多径信号变为

$$s_1(t) = (p+r)s^*(t) \quad (16)$$

$$s_2(t) = (q+r)s^*(t) \quad (17)$$

其中, $s^*(t)$ 是频域信号 $F^*(\omega)$ 在时域上的表达式, 可以发现

$$s_2(t) = \frac{q+r^*}{p+r} s_1(t) \quad (18)$$

由于 p 和 q 都是常数, 在窄带情况下, $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 并不存在线性时延关系, 同时也不存在固定值的相位差, 即 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 的相干性被减弱了。

为便于后续分析, 将式(9)改写为

$$\mathbf{R}_{\text{TR}}(\omega) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{X}' \mathbf{\Gamma}_{\text{TR}}(\omega) \mathbf{F}_{\text{TR}}(\omega) + \boldsymbol{\xi}(\omega) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{S}_{\text{TR}}(\omega) + \boldsymbol{\xi}(\omega) \quad (19)$$

其中, \mathbf{X}' 可写成

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \mathbf{X} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$\mathbf{\Gamma}_{\text{TR}}(\omega)$ 是 TR 阶段之后的传播时延矩阵

$$\mathbf{\Gamma}_{\text{TR}}(\omega) = \begin{bmatrix} \text{diag}[\mathbf{\Gamma}_1(\omega)] & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \text{diag}[\mathbf{\Gamma}_M(\omega)] \end{bmatrix} \quad (21)$$

一般称 $\mathbf{S}_{\text{TR}}(\omega)$ 为 TR 源信号。

3.2 存在误差的导向矢量修正

3.1 节介绍了无误差阵列 DOA 估计模型。但在实际工程应用中, 阵列会普遍存在误差, 且大都是幅相误差, 本节主要分析含有幅相误差的阵列误差校正模型。设第 n 个阵元的幅度误差为 μ_n , 第 n 个阵元的相位误差为 φ_n 。设前 P 个阵元没有误差, 将第一个无误差阵元作为参考阵元, 幅相误差矢量可以表示为

$$\mathbf{E} = [1, E_2, \dots, E_K]^T = [1, \mu_2 e^{j\varphi_2}, \dots, \mu_K e^{j\varphi_K}]^T \quad (22)$$

其中, 幅度误差 μ_n 和相位误差 φ_n 为^[13]

$$\begin{aligned} \mu_n &= 1 + \sqrt{12} \sigma_\mu \beta_n \\ \varphi_n &= \sqrt{12} \sigma_\varphi \eta_n \end{aligned} \quad (23)$$

其中, β_n 和 η_n 都服从 $[-0.5, 0.5]$ 的均匀分布, σ_μ 和 σ_φ 分别是相应的方差。当幅相误差存在时, 阵列导向矢量需要修正为

$$\tilde{\mathbf{a}}(\theta_k) = \text{diag}(\mathbf{E}) \mathbf{a}(\theta_k) = \mathbf{E}(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k) \quad (24)$$

其中, $\mathbf{E}(\theta_k)$ 为幅相误差对角矩阵。相应地, 当存在幅相误差时, 阵列流型矩阵则需被修正为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}(\theta) &= \text{diag} = \\ &\text{diag}(\mathbf{E}) [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)] \end{aligned} \quad (25)$$

经过精确校正后的阵元不存在误差, 因此这些阵元所对应的幅相误差矢量中相应的值为 1。为便于处理, 将幅相误差对角矩阵和阵列导向矢量进行如下分块变换。

$$\mathbf{E}(\theta) = \text{diag} \left\{ \mathbf{1}_{1 \times P}, [\text{vecd}(\mathbf{E}_2(\theta))]^T \right\} \quad (26)$$

$$\mathbf{a}(\theta) = [\mathbf{a}_1^T(\theta), \mathbf{a}_2^T(\theta)]^T \quad (27)$$

其中, $\text{vecd}(\cdot)$ 表示把括号里面的对角矩阵的主对角元素重构成列向量; $\mathbf{a}_1(\theta)$ 表示 $\mathbf{a}(\theta)$ 中前 P 个精确校正过的阵元所对应的导向矢量, $\mathbf{a}_2(\theta)$ 表示 $\mathbf{a}(\theta)$ 中 $M-P$ 个存在幅相误差的阵元所对应的导向矢量。至此, 修正后的阵列导向矢量可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\theta) &= \mathbf{E}(\theta) \mathbf{a}(\theta) = \\ &\begin{bmatrix} 1 & \\ \text{vecd}(\mathbf{E}_2(\theta)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1(\theta) & \mathbf{0}_{P \times (M-P)} \\ \mathbf{0}_{(K-P) \times 1} & \text{diag}[\mathbf{a}_2(\theta)] \end{bmatrix} = \mathbf{e}(\theta) \mathbf{a}(\theta) \end{aligned} \quad (28)$$

3.3 PCA 降维误差校正

本节主要对修正后的时间反演信号 $\tilde{\mathbf{R}}_{\text{TR}}(\omega) = \tilde{\mathbf{A}}(\theta) \mathbf{S}_{\text{TR}}(\omega) + \boldsymbol{\xi}(\omega)$ 进行降维运算。通过推导得知 $\tilde{\mathbf{R}}_{\text{TR}}(\omega)$ 为 $M \times M$ 阶方阵, M 值较大给算法带来较大计算复杂度, 为进一步优化算法性能, 本文利用 PCA 来降低 $\tilde{\mathbf{R}}_{\text{TR}}(\omega)$ 的数据维度以减少计算量。为便于书写, 将 $\tilde{\mathbf{R}}_{\text{TR}}(\omega)$ 记为

$$\mathbf{R} = [r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_M]^T \quad (29)$$

其中, $r_i = [s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_M]^T$, $i = 1, 2, \dots, M$ 表示时间反演信号 $\tilde{\mathbf{R}}_{\text{TR}}(\omega)$ 中包含目标关键位置信息的样本。通过 PCA 降维思想对 $\tilde{\mathbf{R}}_{\text{TR}}(\omega)$ 进行降维处理的步骤如下。

Step1 计算矩阵 \mathbf{R} 列平均值

$$\bar{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M r_m \quad (30)$$

Step2 将矩阵 \mathbf{R} 特征中心化

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{R} - \bar{\mathbf{R}} \quad (31)$$

Step3 构建含有关键位置信息的协方差矩阵

$$\mathbf{K} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi} \quad (32)$$

Step4 通过特征值分解求出 \mathbf{K} 的 s 个特征值及对应的特征向量, 如式(33)和式(34)所示。

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{C} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_s] \quad (34)$$

Step5 按照从大到小顺序将特征值排序, 选择前 q 个最大的特征值及对应的特征向量排序重构为

$$\mathbf{C}_{\text{PCA}} = [x_1^{\text{PCA}} \quad x_2^{\text{PCA}} \quad \cdots \quad x_q^{\text{PCA}}] \quad (35)$$

Step6 将 \mathbf{R} 变换到新维度, 如式(36)所示。

$$\mathbf{R}_{\text{new}} = \boldsymbol{\psi} \mathbf{C}_{\text{PCA}} \quad (36)$$

其中, $\mathbf{R}_{\text{new}} = [r'_1 \quad r'_2 \quad \cdots \quad r'_M]^T$, $r'_i = [s'_1 \quad s'_2 \quad \cdots \quad s'_q]^T$, $i=1,2,\dots,M$, r_i 由原来的 M 维变为现在的 q 维 ($M \geq q$)。接着可以求得降维之后 \mathbf{R}_{new} 的协方差矩阵为

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\text{new}} = \mathbf{E}[\mathbf{R}_{\text{new}} \mathbf{R}_{\text{new}}^H] = \mathbf{U}_s \mathbf{A} \mathbf{U}_s^H + \delta^2 \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \quad (37)$$

其中, $\mathbf{E}[\cdot]$ 表示对括号中的表达式求均值, $[\cdot]^H$ 表示对矩阵求共轭转置, \mathbf{A} 是 $\tilde{\mathbf{R}}_{\text{new}}$ 的 p 个主特征值

$$\mathbf{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} \quad (38)$$

\mathbf{U}_s 定义为信号特征空间分解之后的信号子空间, 相应地, \mathbf{U}_N 定义为噪声子空间。

根据子空间分解的理论可知

$$\mathbf{P}^H(\theta_i) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{P}(\theta_i) = 0, i=1,2,\dots,M \quad (39)$$

即

$$\mathbf{e}^H(\theta_i) \tilde{\mathbf{a}}^H(\theta_i) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \tilde{\mathbf{a}}(\theta_i) \mathbf{e}(\theta_i) = 0, i=1,2,\dots,M \quad (40)$$

令 $\mathbf{Q}(\theta_i) = \tilde{\mathbf{a}}^H(\theta_i) \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \tilde{\mathbf{a}}(\theta_i)$, 即可将式(40)写成

$$\mathbf{e}^H(\theta_i) \mathbf{Q}(\theta_i) \mathbf{e}(\theta_i) = 0, i=1,2,\dots,M \quad (41)$$

由式(28)可知 $\mathbf{e}(\theta_i) \neq \mathbf{0}$, 而 $\mathbf{Q}(\theta_i)$ 为半正定矩阵, 根据辅助阵元法 (ISM, instrumental sensor method) 的基本原理, 若要式(41)成立, 则必须使 $\mathbf{Q}(\theta_i)$ 出现秩损或者令其为奇异矩阵。若 $\mathbf{Q}(\theta_i)$ 出现秩损, 则应满足 $M - P + 1 \leq K - M$ 或者使 $P \geq M + 1$, 且存在幅相误差的阵元所对应的导向

矢量不会出现秩 $M - 1$ 模糊。显然, 精确校正的阵元数 P 小于阵列的阵元数 M , 因此 $\mathbf{Q}(\theta_i)$ 并不能出现秩损现象。因此需满足 $\mathbf{Q}(\theta_i)$ 为奇异矩阵, 当且仅当 $\theta = \theta_i, i=1,2,\dots,M$ 时式(41)才成立。由 ISM 算法的联合估计思想, 可以得到 DOA 参数和幅相误差联合估计的表达式为

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\theta) = \tilde{\mathbf{a}}^H(\theta) \tilde{\mathbf{U}}_N \tilde{\mathbf{U}}_N^H \tilde{\mathbf{a}}(\theta) \quad (42)$$

$$\tilde{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \frac{1}{\det[\tilde{\mathbf{Q}}(\theta)]} \quad \text{或} \quad \tilde{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \frac{1}{\lambda_{\min}[\tilde{\mathbf{Q}}(\theta)]} \quad (43)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}(\tilde{\theta}) = \mathbf{e}_{\min}[\tilde{\mathbf{Q}}(\tilde{\theta})] \quad (44)$$

其中, $\det[\cdot]$ 表示求矩阵行列式的值, λ_{\min} 表示求矩阵的最小特征值, $\mathbf{e}_{\min}[\cdot]$ 表示求矩阵最小特征值所对应的特征向量的值, 且 $\mathbf{e}_{\min}(\mathbf{1}) = 1$ 。

4 仿真分析

4.1 空间谱分析

本节采用 MATLAB 工具对本文所提算法进行仿真验证, 在实验中所设置的天线阵元数 $M = 10$, 每个阵元间距为 $d_{\min} = \lambda / 2$, d_{\min} 是信号的最小波长。在 TR 前向探测阶段中, 探测信号的调制方式为线性频率调制, 载波频率 $f_c = 200$ MHz, 带宽 $B = 20$ MHz, 其他参数如传播时延和衰减因子等根据 IEEE 802.3 标准中的参数设置。为确定 PCA 降维之后的维数, 本文分别仿真了不同维度下的均方根误差 (RMSE, root mean square error)、分辨成功率及运行时间并制成散点图, 最后用 MATLAB 工具拟合成光滑曲线。本节所有仿真都根据蒙特卡罗方法来模拟实际场景, 一般蒙特卡罗仿真次数设置为 500 次, 以使仿真具有可靠性和稳健性。定义角度估计阶段的 RMSE 为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{TN} \sum_{n=1}^N \sum_{t=1}^T (\hat{\theta}_{t,n} - \theta_t)^2} \quad (45)$$

其中, T 为蒙特卡罗仿真次数, θ_t 为真实 DOA 值, $\hat{\theta}_{t,n}$ 为第 t 次试验中第 n 个信号的 DOA 估计值。

分别对不同维数下所提算法的均方根误差、运行时间和分辨成功率进行仿真 (主要通过设置不同的维数来获取仿真结果), 结果如图 2 和图 3 所示。

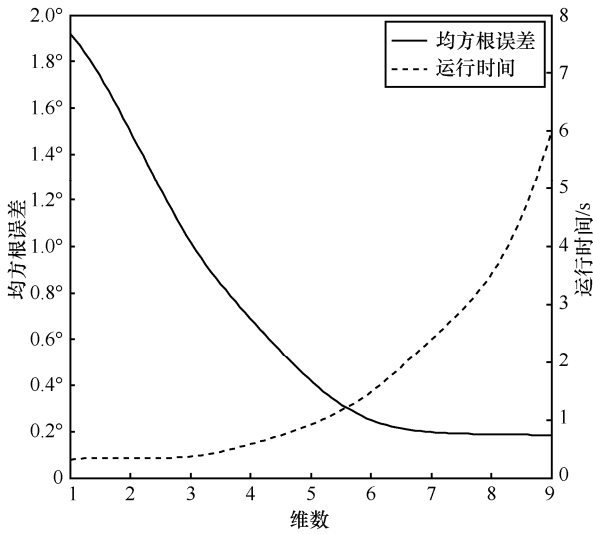


图 2 所提算法在不同维数下的均方根误差与运行时间

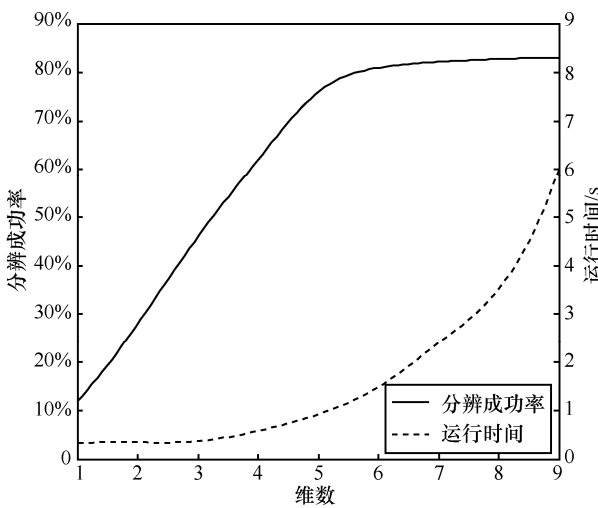


图 3 所提算法在不同维数下的分辨成功率和运行时间

从图 2 和图 3 中可以看出，随着维数增加加本文所提算法的均方根误差逐渐减少且分辨成功率逐渐增加，这是因为，维数越低 PCA 步骤中的重构矩阵 R_{new} 所含关键信息越少，进行估计时误差越大；算法的计算量也会随着矩阵维数的降低而变少，相应地，算法的运行时间将会降低。

综合考虑均方根误差、分辨成功率和运行时间 3 种因素之后，本文算法将 PCA 降维之后的维数设置为 6。维数为 6 时算法的均方根误差较低，分辨成功率能达到 80% 以上且运行时间在可接受范围内。为了对比算法性能，仿真中还加入了传统 ISM 算法和文献[14]所提的 ESPRIT-ISM 算法作为对比。ESPRIT-ISM 算法在幅相误差校正中的应用场景与本文算法十分接近，校正效果可观且复杂度不高，在近几年相关的校正算法中有较强的代表性。

误差校正前后的空间谱如图 4 所示。在此仿真实验中，信噪比 $SNR = 0$ ，入射信号真实角度值设置为 $\{-20^\circ, 0^\circ, 20^\circ\}$ ，幅度误差服从均值为 0、方差为 $\sigma_\mu = 0.4$ 的随机分布，相位误差服从均值为 0、方差为 $\sigma_\phi = 20$ 的随机分布。

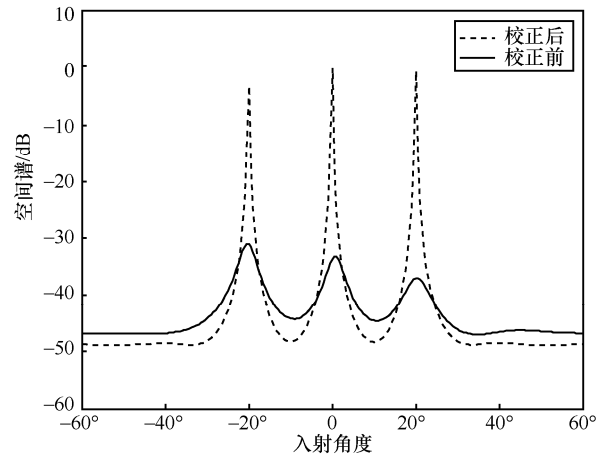


图 4 误差校正前后的空间谱

从图 4 可以看出，由于存在幅相误差，校正前的信号空间谱幅度比校正后的幅度小，且谱峰不如校正后尖锐，同时校正前的信号的谱峰最大值所对应的入射角度与真实角度间存在偏移。采用所提算法对信号进行校正以后，信号空间谱的峰值幅度更明显且谱峰也更加尖锐，与真实入射角的值更加接近，验证了所提算法的误差校正效果。

4.2 误差与分辨成功率

在进行误差分析前，需要引入一个对比参考量，即克拉美罗下界 (CRLB, Cramer-Rao lower bound)。CRLB 用于计算无偏估计中能够获得的最佳估计精度，可为任何无偏估计量的方差确定一个下限，即不可能求得方差小于下限的无偏估计量，本文所设计系统的估计误差只能无限接近这个下限，在理想状况下可以达到这个下限值，与 CLRB 越接近，估计的性能越好。定理 1 用于求解本文理论 CRLB。

定理 1 任何无偏估计量的方差必满足

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \left\{ -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{r} | \theta)}{\partial \theta^2} \right] \right\}^{-1} \quad (46)$$

当且仅当 $\frac{\partial \ln p(\mathbf{r} | \theta)}{\partial \theta} = k(\hat{\theta} - \theta)$ 时，式(46)中等号才成立，其中 k 为常数。

由于本文估计量 $\hat{\theta}$ 也是无偏估计量 (证明详见附录 1), 根据上述定理可以得到所提算法的 CRLB 为

$$\text{CRLB}^{(\text{TR})}(\alpha)^{-1} = \frac{Ng^2}{\pi\sigma_\omega^2} \Re \left\{ \int \left| F(e^{j\omega}) \right|^2 \mathbf{E}^H \mathbf{E} d\omega \right\} \quad (47)$$

其中, \mathbf{E} 为导数矩阵, 如式(48)所示。

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{t}_j}{\partial \mathbf{R}_1} & \frac{\partial \mathbf{t}_j}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{t}_j}{\partial \mathbf{R}_K} & \frac{\partial \mathbf{t}_j}{\partial \theta_K} \end{bmatrix} \quad (48)$$

矢量 $\mathbf{t}_j = \mathbf{T}(e^{j\omega})\mathbf{e}_j = \mathbf{H}(e^{j\omega})\mathbf{H}^*(e^{j\omega})\mathbf{e}_j$ 表示 TR 阶段信道响应矩阵 $\mathbf{T}(e^{j\omega})$ 的第 j 列, \mathbf{e}_j 为单位矢量。

本文所提算法在不同多径条件下的均方根误差随信噪比的变化如图 5 所示。从图 5 可以看出, 所提算法在多径数为 4 时已经有较好性能。但随着信噪比上升, 多径数的增加对算法性能的提升并不明显, 此时不同多径条件下的均方根误差曲线接近重合。为了保证算法的有效性和运行效率, 在后续仿真中将多径数设为 4。

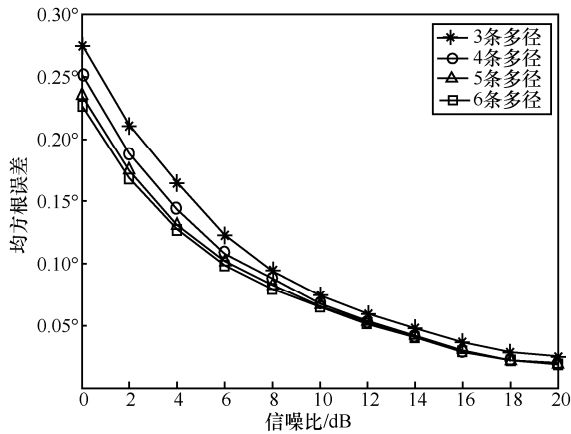


图 5 所提算法在不同多径条件下的均方根误差随信噪比的变化

传统 ISM 算法、ESPRIT-ISM 算法和所提算法在多径数为 4 时均方根误差随信噪比的变化如图 6 所示。从图 6 中可以看出, 在低信噪比情况下, 所提算法的误差比另外 2 种算法低。3 种算法的均方根误差都会随着信噪比的增加而下降, 但所提算法利用 TR 技术独特的空时聚焦特性有效抑制了多径效应, 在多径环境下可以降低信号源相干性, 因此均方根误差始终与 CRLB 最靠近。

分辨成功率与信噪比以及快拍数的变化关系分别图 7 和图 8 所示。定义每次估计的角度值与真实值相差小于 $\pm 1^\circ$ 时为分辨成功。从图 7 和图 8 中可以看出, 3 种算法的分辨成功率都会随着信噪比

和快拍数的增加而提升。但是在低信噪比和低快拍数区域, 影响算法性能的主要因素是多径时延扩展及对信号源位置信息的捕获程度。由于所提算法运用 TR 技术的聚焦特性来获取目标的多径信息, 并有效降低了多径效应的作用, 在低信噪比和低快拍数情况下的分辨成功率也能达到较高水平。但随着信噪比和快拍数的增加, 多径效应对系统性能的影响不再占有主导地位, 3 种算法的分辨成功率达到近似水平。

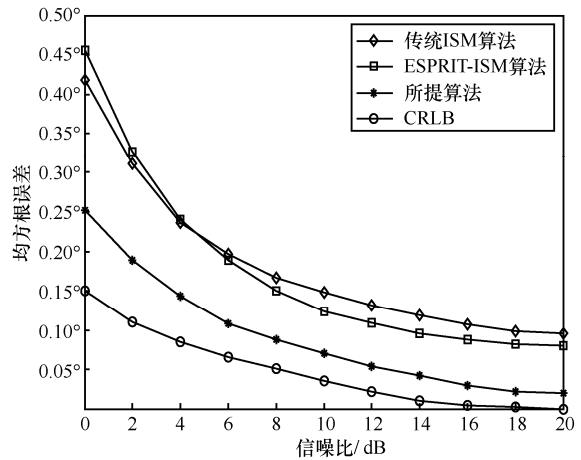


图 6 均方根误差随信噪比的变化

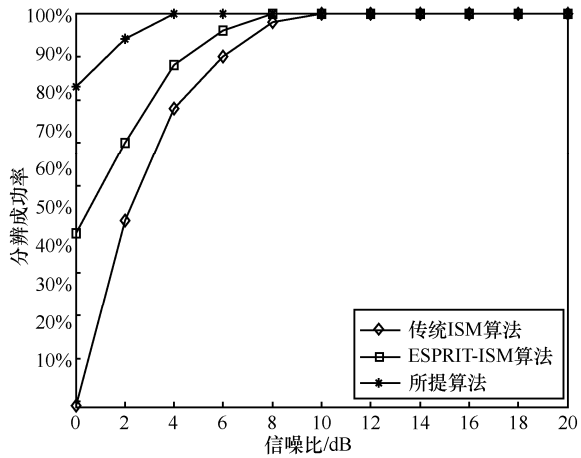


图 7 分辨成功率随信噪比的变化

4.3 校正误差估计值对照

表 1~表 4 是使用所提算法后, 在信噪比 SNR=0 和 SNR=10 dB 情况下的幅度误差估计值及相位误差估计值与所对应的真实值之间的对照。阵元编号为 5~10, 前 4 个阵元作为参考阵元 (不存在误差)。从表 1~表 4 可以看出, 所提算法能有效估计幅度误差与相位误差, 且误差估计值和误差真实值之间的差距会随着信噪比的增加而减少。

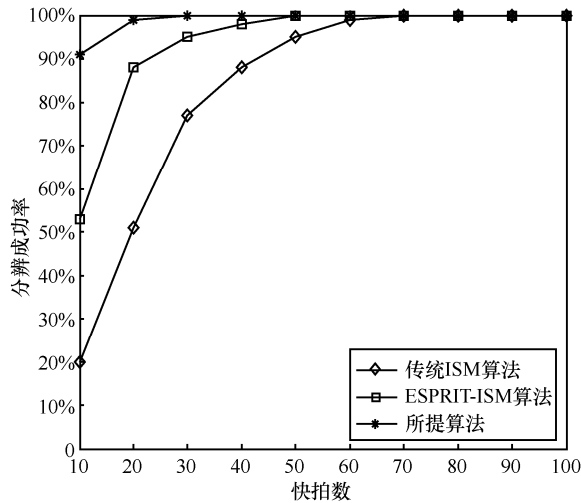


图 8 分辨成功率随快拍数的变化

表 1 幅度误差估计值对比 (SNR=0)

阵元编号	估计值/dB	真实值/dB
5	0.040 8	0.040 6
6	0.040 9	0.0410 0
7	0.034 8	0.034 7
8	0.030 8	0.030 6
9	0.037 1	0.037 0
10	0.040 6	0.040 5

表 2 幅度误差估计值对比 (SNR=10 dB)

阵元编号	估计值/dB	真实值/dB
5	-0.014 5	-0.014 2
6	0.011 6	0.011 4
7	0.013 8	0.013 3
8	0.017 5	0.017 7
9	-0.011 0	-0.011 6
10	-0.014 2	-0.014 3

表 3 相位误差估计值对比 (SNR=0)

阵元编号	估计值/dB	真实值/dB
5	1.026 3	1.021 7
6	1.029 3	1.031 5
7	0.964 4	0.962 0
8	0.886 2	0.885 0
9	0.941 6	0.944 3
10	1.037 7	1.038 2

4.4 复杂度分析

计算复杂度是衡量算法性能的一个重要指标, 本节主要分析 3 种算法的复杂度, 其中一次复数乘

法作为一个计算复杂度的单位。3 种算法所对应的主要计算复杂度如表 5 所示, 其中, M 、 N 、 L 、 Q 分别是天线阵元数、待估计的信号数、采样快拍数和 PCA 降维后的维数。

表 4 相位误差估计值对比 (SNR=10)

阵元编号	估计值/dB	真实值/dB
5	0.557 4	0.560 3
6	-0.332 6	-0.337 1
7	-0.442 9	-0.452 7
8	0.596 2	0.591 2
9	0.436 6	0.429 7
10	-0.512 7	-0.516 3

表 5 不同算法的主要计算复杂度

算法	计算复杂度
传统 ISM 算法	$N^2L + N^2 + N^2(M - N)L + (M - N)^2$
ESPRIT-ISM 算法	$M^2L + M^3$
所提算法	$4MN + M^3 + N^2L + N^2 + N^2(Q - N)L + (Q - N)^2$

从表 5 可以看出, 3 种算法的主要计算复杂度来源于特征分解和求协方差矩阵, 特征运算会产生约 M^3 的计算复杂度, TR 部分产生的主要计算复杂度为 $4MN$ 。所提算法在 PCA 降维部分会多进行一次特征运算, 但降维之后维数发生改变, 相应地, 算法的复杂度也会改变, 总体来看, 所提算法的计算复杂度低于对比算法。

5 结束语

针对多径环境下信号源相干性增强从而使幅相误差校正算法精度不高的问题, 本文提出了一种基于 TR 的 PCA 降维幅相误差校正算法。首先通过 TR 技术抑制多径效应以降低 DOA 信号源的相干性; 然后通过 PCA 使 TR 重构矩阵维数降低以减少计算量; 最后推导出相应的 DOA 参数和误差的表达式, 并对含有幅相误差的信号进行校正分析。仿真结果表明, 所提算法能够以较低复杂度对阵列幅相误差进行有效校正, 且在低信噪比和低快拍数情况下也能保持较高的分辨成功率。

附录 1 算法无偏估计量的证明

将本文算法的估计量记作 $\hat{\theta}$, 将每次估计的值记作 $\hat{\theta}_i (i=1, 2, \dots, n)$, $\bar{\theta}$ 为估计量的均值, 并将真实方差记作 σ^2 , 真实均值记作 μ 。若此时用式(49)来估计总体方差

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_i - \bar{\theta})^2 \quad (49)$$

则会产生 $\frac{1}{n}\sigma^2$ 的低估误差, 估计量将变成有偏估计量。因此用更新后的式子来估计, 即

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_i - \bar{\theta})^2 \quad (50)$$

求式(50)的均值, 可表示为

$$\begin{aligned} E(s^2) &= E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_i - \bar{\theta})^2\right] = \frac{1}{n-1} E\left\{\sum_{i=1}^n [(\hat{\theta}_i - \mu) - (\bar{\theta} - \mu)]^2\right\} = \\ &= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_i - \mu)^2 - 2\sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_i - \mu)(\bar{\theta} - \mu) + \sum_{i=1}^n (\bar{\theta} - \mu)^2\right] \end{aligned} \quad (51)$$

其中, $\bar{\theta} - \mu$ 表示一个数值, 因此可将式(51)写成

$$\begin{aligned} E(s^2) &= \\ &= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_i - \mu)^2 - 2(\bar{\theta} - \mu)\sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_i - \mu) + \sum_{i=1}^n (\bar{\theta} - \mu)^2\right] = \\ &= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_i - \mu)^2 - n(\bar{\theta} - \mu)^2\right] = \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{\sum_{i=1}^n E[(\hat{\theta}_i - \mu)^2] - nE[(\bar{\theta} - \mu)^2]\right\} = \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \sigma_{\hat{\theta}_i}^2 - n\sigma_{\bar{\theta}}^2\right) \end{aligned} \quad (52)$$

其中, $\sigma_{\hat{\theta}_i}^2 = \sigma^2$ 为真实方差, $\sigma_{\bar{\theta}}^2 = \sigma^2/n$ 为估计方差, 将式(52)进一步化简可得

$$E(s^2) = \frac{1}{n-1} \left(n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right) = \sigma^2 = D(\theta) \quad (53)$$

由式(53)可知, $E(s^2)$ 为 σ^2 的无偏估计, 即所提算法估计量 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量。

证毕。

参考文献:

- [1] LIN Y C, LEE T S, PAN Y H, et al. Low-complexity high-resolution parameter estimation for automotive MIMO radars[J]. IEEE Access, 2019, 8: 16127-16138.
- [2] MUSHTAQ A, MAHENDRU G. A proposed DOA estimation technique based on wavelet packet decomposition for fading channel in MIMO systems[C]//2019 6th International Conference on Signal Processing and Integrated Networks. Piscataway: IEEE Press, 2019: 278-281.
- [3] ZHENG Z, MU S L. Two-dimensional DOA estimation using two parallel nested arrays[J]. IEEE Communications Letters, 2020, 24(3): 568-571.
- [4] XIE W, WANG C S, WEN F, et al. DOA and gain-phase errors estimation for noncircular sources with central symmetric array[J]. IEEE Sensors Journal, 2017, 17(10): 3068-3078.
- [5] ZHANG F Q, ZHANG Z H, HE J, et al. Joint estimation of DOA and channel errors with sparse recovery for SKA low-frequency array[J]. The Journal of Engineering, 2019, 2019(21): 8111-8115.
- [6] HUANG B T, JIANG M, WU G X, et al. Using time reversal for direction of arrival estimation in multipath environment[C]//2019 IEEE International Symposium on Phased Array System & Technology. Piscataway: IEEE Press, 2019: 1-4.
- [7] 王布宏, 王永良, 陈辉. 多径条件下基于加权空间平滑的阵元幅相误差校正[J]. 通信学报, 2004, 25(5): 166-174.
WANG B H, WANG Y L, CHEN H. Array gain and phase calibration in the presence of multipath based on weighted spatial smoothing[J]. Journal of China Institute of Communications, 2004, 25(5): 166-174.
- [8] 王鼎, 吴璘. 多径条件下的乘性阵列误差有源校正算法[J]. 中国科学: 信息科学, 2015, 45(2): 270-288.
WANG D, WU Y. The multiplicative array errors calibration algorithms in the presence of multipath[J]. Scientia Sinica Informationis, 2015, 45(2): 270-288.
- [9] SIPPEL E, LIPKA M, GEIB J, et al. In-situ calibration of antenna arrays within wireless locating systems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2020, 68(4): 2832-2841.
- [10] FINK M, PRADA C, WU F, et al. Self focusing in inhomogeneous media with time reversal acoustic mirrors[C]//IEEE Ultrasonics Symposium. Piscataway: IEEE Press, 1989: 681-686.
- [11] CHENG J, WANG W Q, CHEN H, et al. Temporal focusing effects of time-reversal frequency diverse array antenna[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2019, 18(9): 1858-1862.
- [12] LIN Z W, HU B J, WEI Z H, et al. An optimal time reversal waveform based on sequential convex programming for wireless power transmission[C]//2018 IEEE 18th International Conference on Communication Technology. Piscataway: IEEE Press, 2018: 916-920.
- [13] 李有明, 王让定, 文化峰. 均匀直线阵幅相误差校正的扰动分析及最优算法[J]. 电子与信息学报, 2007, 29(7): 1653-1656.
LI Y M, WANG R D, WEN H F. Perturbation analysis of gain and phase error calibration for uniform linear array with optimal algorithms[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2007, 29(7): 1653-1656.
- [14] 张柏强. 舰载高频地波雷达阵列误差建模与校正算法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2017.
ZHANG B Q. Research on array error modeling and calibration algorithm for shipborne high frequency surface wave radar[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2017.

[作者简介]



李方伟 (1960-), 男, 重庆南川人, 博士, 重庆邮电大学教授、博士生导师, 主要研究方向为下一代无线通信系统的关键技术、移动通信安全、时间反演等。

鲁佳文 (1996-), 男, 湖北天门人, 重庆邮电大学硕士生, 主要研究方向为时间反演、室内 DOA 定位、阵列幅相误差校正等。

王明月 (1990-), 女, 重庆九龙坡人, 重庆邮电大学博士生, 主要研究方向为时间反演、信号检测、索引调制等。